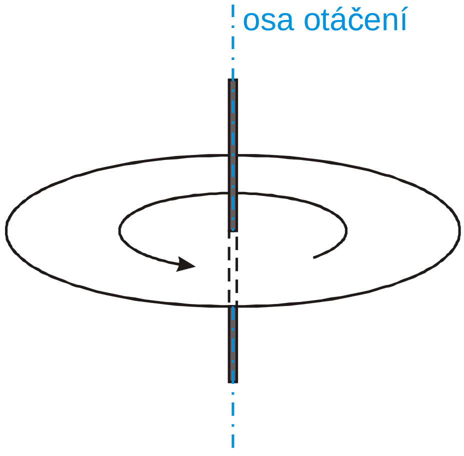
1.3.5 Kruhový pohyb

Předpoklady: 010105

Pomůcky: kolo, odstředivý stroj.

Předměty kolem nás se pohybují různými způsoby. Nejde pouze o přímočaré nebo křivočaré posuvné pohyby. Velmi často se předměty otáčí (a některé se přitom pohybují zároveň i posuvným pohybem).
Zatím se budeme zabývat pouze nejjednodušším otáčením, během kterého se poloha předmětu jako celku nemění, probíhá pouze otáčení kolem pevné osy. Takto se pohybují například kolotoče, brusky, soustruhy, gramofonové desky, CD a DVD disky, plotny uvnitř harddisků a mnoho dalších zařízení (nebo jejich částí).



Zachycovat pohyb můžeme stejným způsobem jako dosud – budeme stopovat čas a v pravidelných intervalech měřit polohu sledovaného bodu. Než to doopravdy zkusíme, pokusíme se zorientovat v situaci, kterou otáčení přináší.
Obvod kružnice je dán vzorcem: $o = 2\pi r$, kde r je její poloměr a π jedna z nejznámějších matematických konstant $\pi \doteq 3{,}14159$.
Představme si, že budeme sledovat pohyb tří různých bodů na otáčejícím se kolotoči. Jednotlivé body mají od osy otáčení vzdálenosti r_1, r_2, r_3.

Př. 1: Doplň následující tabulku drah a otáček, které urazí jednotlivé body během otáčení. Při vyplňování tabulky postupuj po řádcích.

počet otáček	**dráha bodu ve vzdálenosti r_1**	**dráha bodu ve vzdálenosti r_2**	**dráha bodu ve vzdálenosti r_3**
1			
2			
$\frac{1}{3}$			
	$\frac{13}{4}\pi r_1$		
		$\frac{3}{17}\pi r_2$	

První řádek je jasný, v dalších budeme používat přímou úměrnost:

1 otáčka … $2\pi r_1$

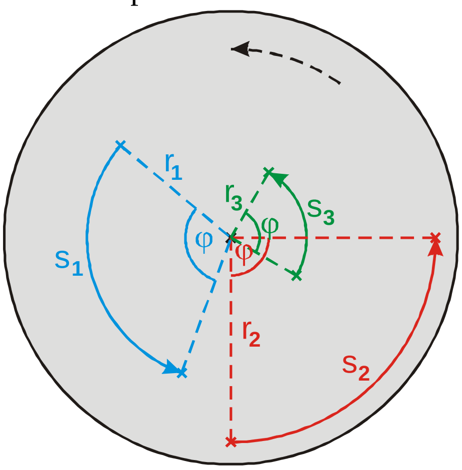
1/3 otáčky … $\frac{1}{3}\cdot 2\pi r_1 = \frac{2}{3}\pi r_1$

počet otáček	dráha bodu ve vzdálenosti r_1	dráha bodu ve vzdálenosti r_2	dráha bodu ve vzdálenosti r_3
1	$2\pi r_1$	$2\pi r_2$	$2\pi r_3$
2	$4\pi r_1$	$4\pi r_2$	$4\pi r_3$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\pi r_1$	$\frac{2}{3}\pi r_2$	$\frac{2}{3}\pi r_3$
$\frac{13}{8}$	$\frac{13}{4}\pi r_1$	$\frac{13}{4}\pi r_2$	$\frac{13}{4}\pi r_3$
$\frac{3}{34}$	$\frac{3}{17}\pi r_1$	$\frac{3}{17}\pi r_2$	$\frac{3}{17}\pi r_3$

Pedagogická poznámka: Je nutné, aby alespoň tři první řádky vyplnil každý sám. Rychlejší část třídy zatím může zkoumat tabulku, hledat shody a přemýšlet jak nejúsporněji pohyb bodů zachytit.

- Výrazy pro vzdálenosti jsou v každém řádku téměř stejné, liší se pouze v indexu u poloměru (při výpočtu postupujeme stejně, jenom dosazujeme různé poloměry).
- Pokud se kolotoč otočí například o 1/3 otáčky, body v různých vzdálenostech od středu se otočí o různé vzdálenosti, ale všechny se otočí o stejný úhel.
- Měření délky kružnice (kružnicového oblouku) je poměrně obtížné.

$\Rightarrow$ Při sledování pohybu po kružnici je výhodnější měřit **úhel otočení** φ, který urazí libovolný bod na otáčejícím se předmětu. Pomocí tohoto úhlu (a vzdálenosti od osy otáčení) snadno dopočítáme dráhu libovolného bodu na otáčejícím se předmětu.



V jakých jednotkách se nám vyplatí úhel měřit?

Možnosti:

- otáčky (první sloupec tabulky),
- stupně (známe z matematiky).

Existuje lepší možnost:

- Výrazy pro vzdálenosti jsou v každém řádku téměř stejné, liší se pouze v indexu u poloměru.
- Každý řádek v tabulce znamená otočení předmětu o stejný úhel.

$\Rightarrow$ Výraz $s = \frac{2}{3}\pi r$ si můžeme rozdělit: $s = \frac{2}{3}\pi r$, kde $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ je úhel v nových dosud neznámých jednotkách, které umožňují počítat dráhu pomocí vzorce $s = \varphi r$. Nová jednotka se jmenuje radián $[\text{rad}]$.

Pohyb předmětů po kružnici nejlépe zachycujeme pomocí úhlu otočení φ. Úhel otočení měříme v radiánech [rad]. Pro dráhu pak platí: $s = \varphi r$, kde *r* je vzdálenost bodu od středu otáčení.

Př. 2: Najdi převodní vztah mezi radiány a:
a) otáčkami b) stupni

Stačí využít libovolnou z řádek tabulky. Například z třetí řádky:

$\frac{1}{3}\text{otáčky} = \frac{2}{3}\pi\,\text{rad} \Rightarrow \frac{1}{3}\text{otáčky} = 120° = \frac{2}{3}\pi\,\text{rad} \quad / \cdot 3$

$1\,\text{otáčka} = 360° = 2\pi\,\text{rad}$

Mezi stupni a radiány převádíme pomocí rovnosti $360° = 2\pi\,\text{rad}$**.**

Proč si z nekonečně mnoha rovností vybereme právě předchozí? Umožňuje jistější zapamatování: $360°$ představuje středový úhel kruhu ve stupních a 2π hodnotu tohoto úhlu v radiánech ve tvaru, ve kterém vystupuje ve vzorci pro obvod kruhu: $s = \varphi r = 2\pi r$.

Pedagogická poznámka: Myslím si, že je důležité si se studenty na téma předchozího odstavce popovídat. Právě výběr nejvhodnější rovnosti na zapamatování představuje příklad toho, jak informace v paměti dobře uspořádávat.

Př. 3: Odvoď ze vztahu $360° = 2\pi\,\text{rad}$ vztahy pro určení velikosti jednoho radiánu a jednoho stupně.

$360° = 2\pi\,\text{rad} \Rightarrow 1° = \frac{2\pi}{360}\text{rad} = \frac{\pi}{180}\text{rad} = 0{,}0175\,\text{rad}$

$360° = 2\pi\,\text{rad} \Rightarrow 1\,\text{rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)° = \left(\frac{180}{\pi}\right)° = 57{,}3°$

Poznámka: Pokud vyjadřujeme úhel v radiánech, říkáme, že používáme **obloukovou míru**. Název oblouková vyjadřuje, že radiány umožňují přímo počítat délky oblouků, které úhlům přísluší. Tato skutečnost je také základem definice radiánu: Úhel o velikosti jednoho radiánu je středový úhel, který na kružnici o poloměru 1 m přísluší oblouku o délce 1m.

Př. 4: Ke každé dvojici poloměr, úhel vypočti délku příslušné dráhy kruhového pohybu:

a) $2\,\mathrm{m}$, $3\,\mathrm{rad}$ b) $0{,}3\,\mathrm{cm}$, $120\,\mathrm{rad}$

c) $15\,\mathrm{m}$, $\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$ d) $6378\,\mathrm{km}$, $\pi\,\mathrm{rad}$

Ve všech případech použijeme vzorec $s = \varphi r$:

a) $2\,\mathrm{m}$, $3\,\mathrm{rad}$ $\Rightarrow$ $s = \varphi r = 3 \cdot 2\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}$

b) $0{,}3\,\mathrm{cm}$, $120\,\mathrm{rad}$ $\Rightarrow$ $s = \varphi r = 120 \cdot 0{,}3\,\mathrm{cm} = 36\,\mathrm{cm}$

c) $15\,\mathrm{m}$, $\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$ $\Rightarrow$ $s = \varphi r = \frac{\pi}{3} \cdot 15\,\mathrm{m} = 5\pi\,\mathrm{m} = 15{,}7\,\mathrm{m}$

d) $6378\,\mathrm{km}$, $\pi\,\mathrm{rad}$ $\Rightarrow$ $s = \varphi r = \pi \cdot 6378\,\mathrm{km} = 20037\,\mathrm{km}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad by opět měli všichni udělat sami. Na synchronizaci třídy jsou určeny následující dva příklady. Příklad 6 stačí pomalejším ukázat. Jde o to, aby si uvědomili, že používání radiánů je opravdu výhodné.

Př. 5: Najdi význam vzdálenosti spočtené v bodě d) předchozího příkladu.

d) $6378\,\mathrm{km}$, $\pi\,\mathrm{rad}$ $\Rightarrow$ $s = \varphi r = \pi \cdot 6378\,\mathrm{km} = 20037\,\mathrm{km}$

$6378\,\mathrm{km}$ - poloměr Země

$\varphi = \pi$ - polovina celé otáčky

$\Rightarrow$ $s = \varphi r = \pi \cdot 6378\,\mathrm{km} = 20037\,\mathrm{km}$ je vzdálenost, kterou urazí za půl dne (12 hodin) kvůli otáčení Země kolem vlastní osy bod na rovníku.

Krásná ukázka relativity pohybu. Protože se touto rychlostí otáčí i všechny předměty okolo nás, vůbec ji nevnímáme.

Př. 6: Ke každé dvojici poloměr, úhel vypočti délku příslušné dráhy kruhového pohybu:

a) $2\,\mathrm{m}$, $90°$ b) $0{,}3\,\mathrm{cm}$, $450°$

Více možných postupů:

- Použijeme vzorec $s = \varphi r$, úhel musíme převést na radiány.
- Využijeme přímou úměrnost s obvodem kružnice o stejném poloměru.

a) $2\,\mathrm{m}$, $90° = \left(90 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\mathrm{rad} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$ $\Rightarrow$ $s = \varphi r = \frac{\pi}{2} \cdot 2\,\mathrm{m} = \pi\,\mathrm{m} = 3{,}14\,\mathrm{m}$

b) $0{,}3\,\mathrm{cm}$, $450°$

$360°$ … $2\pi \cdot 0{,}3\,\mathrm{cm}$

$450°$ … s cm

$$s = \frac{2\pi \cdot 0{,}3}{360} \cdot 450\ \mathrm{cm} = 2{,}36\,\mathrm{cm}$$

Pedagogická poznámka: Je samozřejmě úplně jedno, jakým způsobem studenti předchozí příklad řeší. Hlavní je, aby si na vlastní kůži ozkoušeli, že počítat dráhu ze stupňů je podstatně zdlouhavější než z radiánů.

Př. 7: Doplň tabulku. Postupuj po sloupcích.

úhel otočení [otáčky]		2		15		π	
úhel otočení [radiány]	2π				100		
úhel otočení [stupně]			180°				270π

úhel otočení [otáčky]	1	2	0,5	15	$\frac{100}{2\pi}=15,9$	π	2,36
úhel otočení [radiány]	2π	4π	π	30π	100	$\pi\cdot 2\pi=19,7$	14,8
úhel otočení [stupně]	360°	720°	180°	5400°	$\frac{100\cdot 180}{\pi}=5730°$	$\pi\cdot 360=1130°$	$270\pi°$

Pedagogická poznámka: Pokud máte málo času, doporučuji nechat dopočítání posledního příkladu na doma a zkontrolovat ho na začátku příští hodiny.

Shrnutí: Pohyb po kružnicích se lépe měří pomocí úhlu otočení, který udáváme v radiánech $360° = 2\pi\,\text{rad}$.